Themen

Grundbegriffe zu Graphen	1
Eulersche Kantenzüge	2
Königsberger Brückenproblem	3
Briefträgerproblem	4
Minimaler Spannbaum	5
Kürzeste Wegstrecke	6
Algorithmus von Dijkstra	7

Beispielseiten zur Ansicht – Eigentum von EMS Kraus

Briefträgerproblem

Eines der bekannten Probleme der Graphentheorie ist das so genannte Briefträgerproblem. Dabei geht es um die Vorstellung von einem Postboten, der in den Straßen einer Stadt – auf beiden Seiten der Straße gleichzeitig – Briefe zustellt. Er soll es auf dem kürzesten Weg erledigen, jede Straße mindestens einmal passieren und wieder zum Ursprung zurückkehren

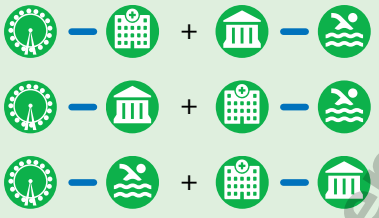
Der chinesische Mathematiker Guan Meigu (*1934), auch bekannt als Mei-Ko Kwan, präsentierte das Problem erstmals 1962. Deshalb erhielt es auch den Namen „Chinese Postman Problem“.

Für die Lösung des Problems wird das Straßennetz als Graph modelliert. Kreuzungen werden darin zu Knoten, die Straßen werden zu Kanten.

Enthält der Graph einen Eulerkreis, ist der kürzeste Weg die Summe aller nacheinander durchlaufenen Kanten. Also wird im ersten Schritt zur Lösung geprüft, ob der Graph Knoten mit ungeradem Grad enthält.

Der Graph in unserem Beispiel enthält vier Knoten dritten Grades. Um im Graphen einen Eulerkreis zu erzeugen, werden zusätzliche Kanten eingefügt, die jeweils zwei Knoten dritten Grades verbinden. Dabei werden die beiden Verbindungen gewählt, die zusammen die kürzeste Wegstrecke ergeben.

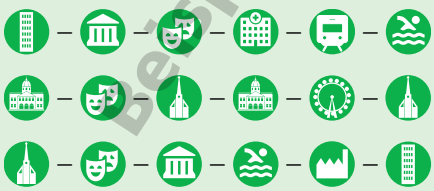
In unserem Beispiel gibt es mehrere Möglichkeiten, die Knoten dritten Grades zu verbinden:

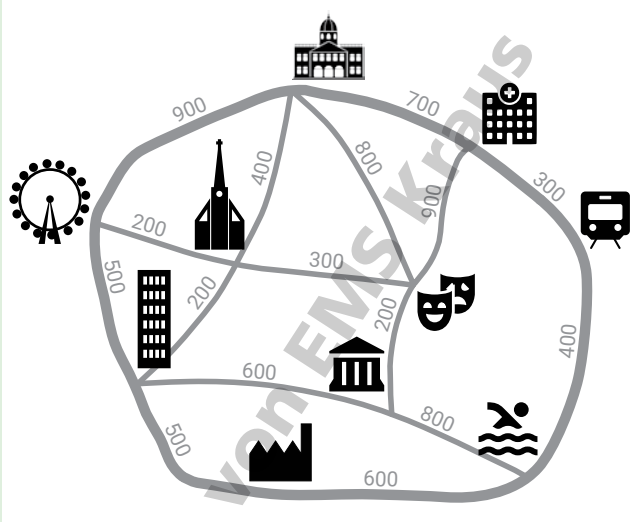

= 1400 + 800

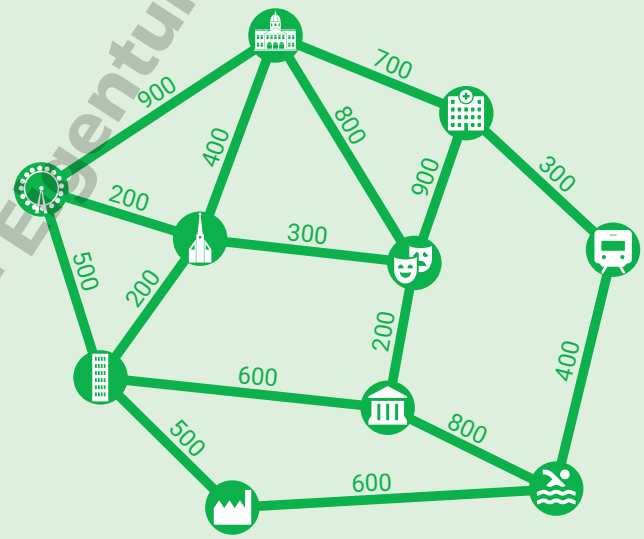
= 700 + 700

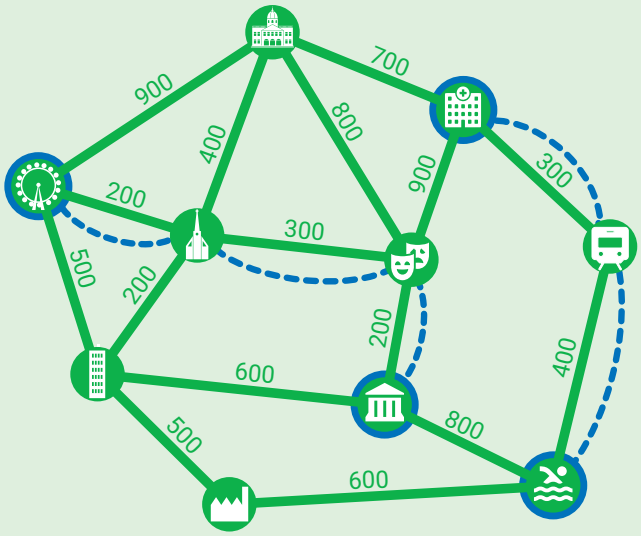
= 1500 + 1100

Die Verbindungen mit der kürzesten Wegstrecke führen vom Riesenrad zum Rathaus und vom Krankenhaus zum Schwimmbad. Unter Einbeziehung dieser zusätzlichen Kanten ergibt sich ein Eulerkreis, und der Postbote könnte beispielsweise diesen kürzesten Weg nehmen:





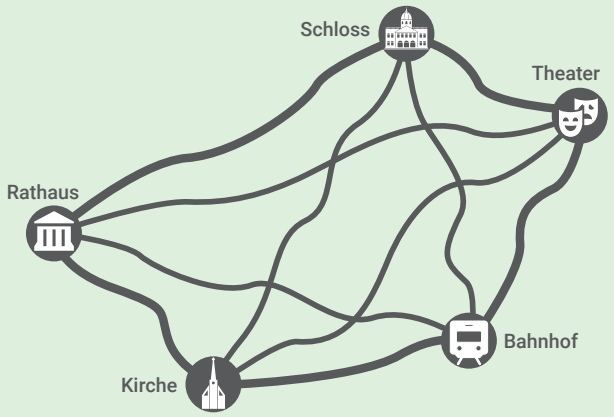




Beispielseiten zur Ansicht – Eigentum von EMS Kraus

Briefträgerproblem

Aufgabe 1
Ein Briefträger soll in den Straßen der abgebildeten Stadt Briefe austragen. Er soll am Rathaus starten, alle Straßen ablaufen und wieder zum Rathaus zurückkehren.



a) Existiert in der abgebildeten Stadt ein Weg, auf dem der Briefträger alle Straßen genau einmal abläuft und der ihn wieder zum Rathaus zurück führt? Begründe deine Antwort.

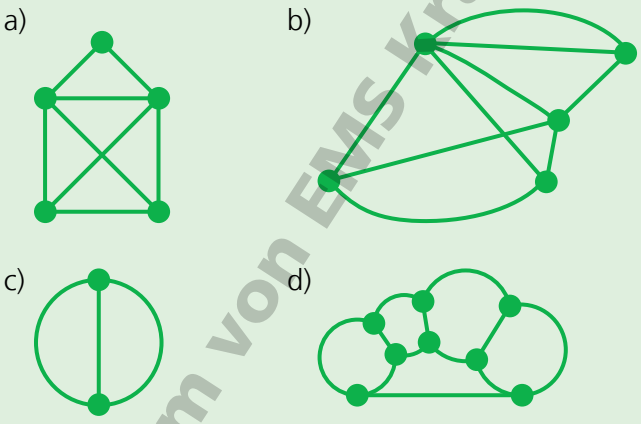
b) Wie ermittelt man die Länge des kürzesten Weges, den der Briefträger durch die Stadt nehmen kann?

c) Nenne einen möglichen Weg, den der Briefträger durch die Stadt nehmen kann.

Aufgabe 2
Nenne weitere Anwendungsbeispiele für das Briefträgerproblem?

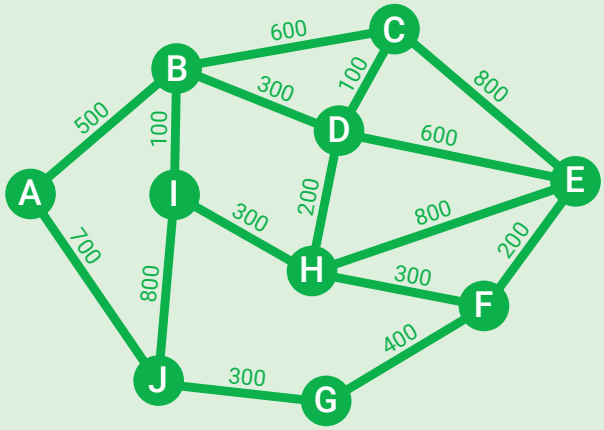
Aufgabe 3
Warum ist es sinnvoll, in einem Graphen durch das Einfügen zusätzlicher Kanten einen Eulerkreis zu erzeugen?

Aufgabe 4
Durch welche zusätzlichen Kanten lassen sich in den folgenden Graphen Eulerkreise erzeugen? Zeichne die zusätzlichen Kanten ein.



Aufgabe 5
Der Graph bildet eine Stadt ab, in deren Straßen ein Briefträger die Post austragen soll, bevor er wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Der Graph soll verändert werden, um die kürzeste Route des Briefträgers ermitteln zu können.



a) Welche Knoten müssen dazu mit zusätzlichen Kanten verbunden werden?

b) Welche Möglichkeiten gibt es, diese Knoten mit zusätzlichen Kanten zu verbinden?

c) Welche Verbindungen ergeben zusammen die kürzeste Wegstrecke?

Beispielseiten zur Ansicht – Eigentum von EMS Kraus

Algorithmus von Dijkstra

Der niederländische Informatiker Edsger W. Dijkstra (1930–2002) erfand einen Algorithmus, der das Problem des kürzesten Pfades löst. Mit Hilfe des Algorithmus kann man – ausgehend von einem Startknoten – den kürzesten Pfad zu allen anderen Knoten eines kantengewichteten Graphen bestimmen.

Der Algorithmus basiert darauf, dass man vom Startknoten und von jedem weiteren besuchten Knoten aus stets derjenigen Kante folgt, mit der sich die kürzeste Verbindung zwischen dem Startknoten und dem nächsten erreichbaren, unbesuchten Knoten aufbauen lässt.

Entsprechend wählt man in unserem Beispiel unten im 3. Schnitt die Kante mit dem Kantengewicht 2, und nicht die Kante mit dem Kantengewicht 5.

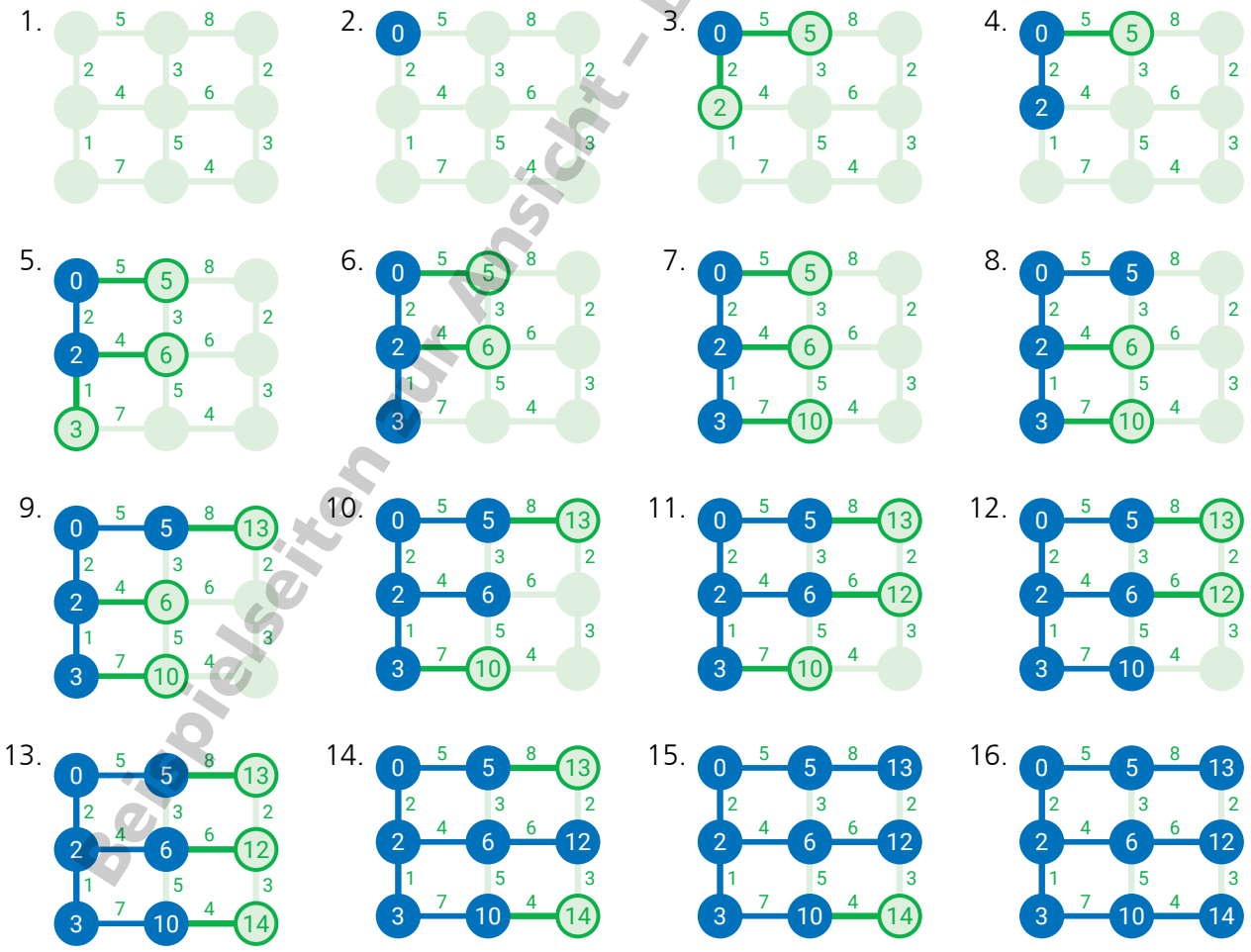
Der Algorithmus von Dijkstra zählt zu den so genannten gierigen Algorithmen. Bei diesen Algorithmen wird in jedem Schritt nur die aktuell beste Lösung ausgewählt. Vorherige oder nachfolgende Entscheidungen werden nicht berücksichtigt.

Dementsprechend wird die Entfernung zu einem besuchten Knoten (in unserem Beispiel blau gefärbt) nicht mehr geändert, auch wenn sich in der Folge eine geringere Entfernung ergibt.

Die Entfernungen zu Knoten, die noch nicht besucht wurden (erkennbar am blauen Rand), können sich hingegen ändern, sobald sich über eine andere Route ein kürzerer Weg dorthin ergibt.

So wird schrittweise Knoten für Knoten besucht, bis der kürzeste Weg zum Zielknoten gefunden wurde oder bis die Entfernungen aller Knoten zum Startknoten bekannt sind.

Beispiel für das Anwenden des Algorithmus von Dijkstra

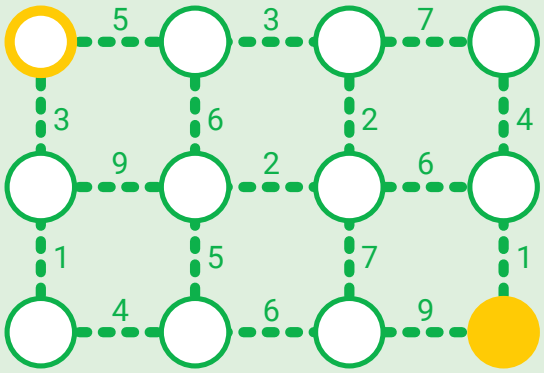


Beispielseiten zur Ansicht – Eigentum von EMS Kraus

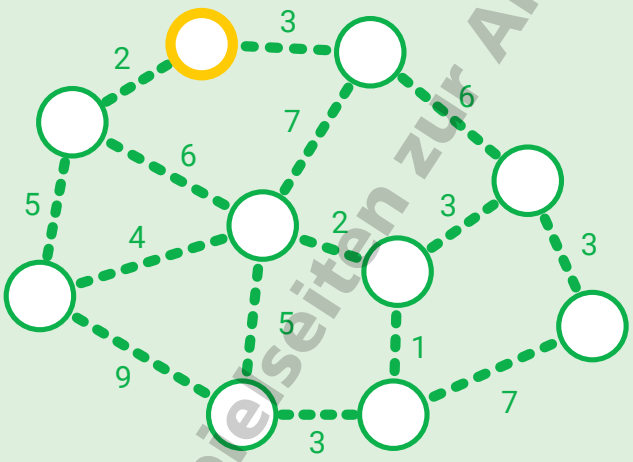
Algorithmus von Dijkstra

Aufgabe 1
Was zeichnet die so genannten gierigen Algorithmen aus?

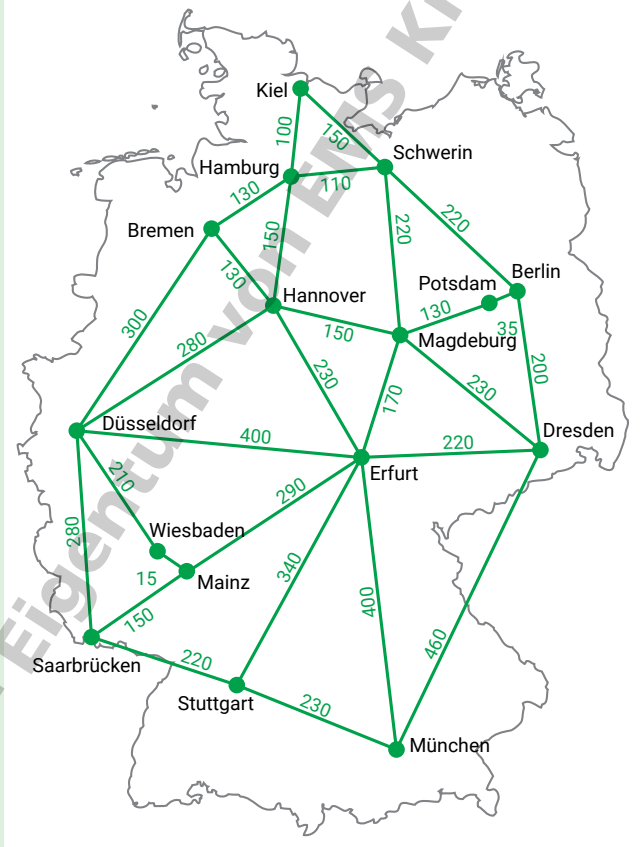
Aufgabe 2
Ermittle mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra den kürzesten Pfad vom gelb umrandeten Knoten zum gelben Knoten.



Aufgabe 3
Ermittle mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die Länge der kürzesten Pfade vom gelb umrandeten Knoten zu allen übrigen Knoten des Graphen.



Aufgabe 4
Ermittle mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra die Länge der kürzesten Routen von der Bundeshauptstadt Berlin zu allen Landeshauptstädten.



Aufgabe 5
Worin besteht der Vorteil des Algorithmus von Dijkstra gegenüber der Brute-Force-Methode?

Beispielseiten zur Ansicht – Eigentum von EMS Kraus