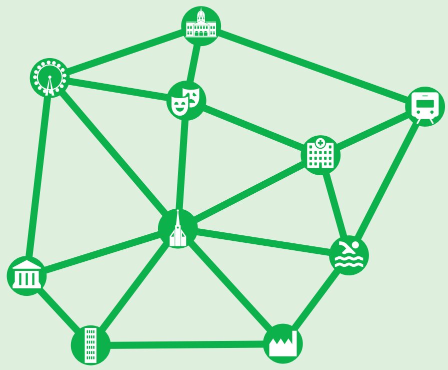
Themen

Datenstruktur Graph

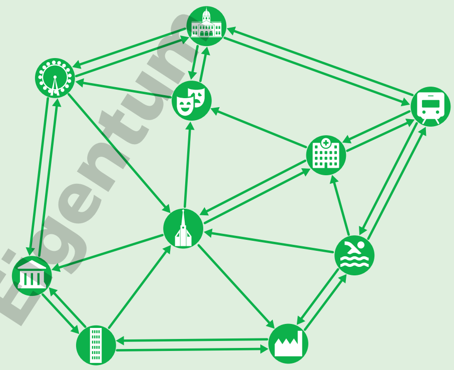
Der Graph ist eine dynamische Datenstruktur, mit der sich vernetzte Strukturen wie Straßenverbindungen, Rohrleitungs- und Telefonnetze oder auch soziale Netzwerke abbilden lassen.

Graphen bestehen aus Knoten und Kanten, die jeweils zwei Knoten miteinander verbinden. Innerhalb eines Graphen führt von jedem Knoten ein Weg zu jedem anderen Knoten.

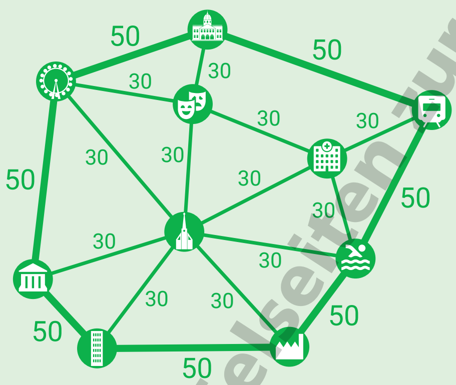
Man unterscheidet vier grundlegende Arten von Graphen:



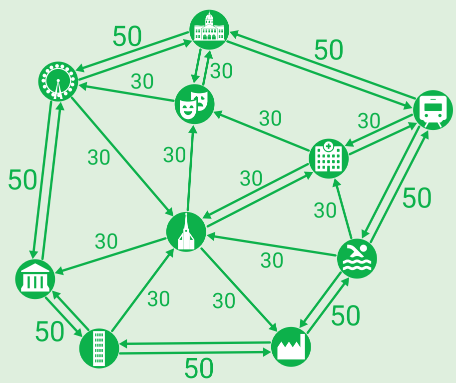
Ungerichtete Graphen zeigen nur die bestehenden Verbindungen der Knoten. In unserem Beispiel sind das die Straßen, die von einer Sehenswürdigkeit unserer kleinen Stadt zur anderen führen.



Der gerichtete Graph enthält zusätzlich Informationen über die Richtung der Verbindungen. In unserem Beispiel gibt es Einbahnstraßen und Straßen mit Gegenverkehr, die im Graph als einzelne und doppelte Pfeile dargestellt sind.



In einem ungerichteten, gewichteten Graph lassen sich Eigenschaften der Wegstrecken abbilden, die durch eine Kante repräsentiert werden. Das können beispielsweise Entfernungen in einem Straßennetz oder Durchflussmengen in einem Rohrleitungsnetz sein. In unserem Beispiel lassen sich so die unterschiedlichen zulässigen Höchstgeschwindigkeiten darstellen.

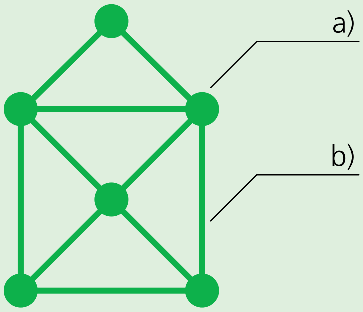


Ein gerichteter, gewichteter Graph vereint beide Möglichkeiten. In ihm lassen sich sowohl die Richtung der Verbindungen als auch Eigenschaften der Wegstrecken (Kanten) abbilden. In unserem Beispiel lassen sich auf diese Weise die Einbahnstraßen und die zulässigen Höchstgeschwindigkeiten abbilden.

Datenstruktur Graph

Aufgabe 1

Benenne die Teile des Graphen.



a) Knoten

b) Kante

Aufgabe 2

Worin besteht der Unterschied zwischen einem Baum und einem Graph?

Innerhalb eines Graphen führt von jedem Knoten ein Weg zu jedem anderen Knoten. Es gibt keine hierarchischen Beziehungen zwischen den Knoten eines Graphen. Alle Knoten sind gleichwertig.

In einem Baum besteht eine hierarchische Beziehung vom Wurzelknoten bis hinunter zu einem Blatt. Innerhalb eines Baumes gibt es von der Wurzel zu jedem Knoten einen eindeutigen Pfad.

Aufgabe 3

Nenne Beispiele aus dem Alltag, die sich mit Hilfe von Graphen darstellen lassen, und zwar als

a) ungerichteter Graph

Autobahnetz,
Stromnetz,
Soziales Netzwerk

b) gerichteter Graph

Abwassernetz mit Fließrichtung,
Straßennetz mit Einbahnstraßen
Fluchtwegplan in einem Gebäude

c) gewichteter Graph

Autobahnnetz mit Entfernungen,
Rohrleitungsnetz mit unterschiedlichen Rohrquerschnitten
Buslinienetz mit Fahrzeiten

Datenstruktur Graph

Aufgabe 4

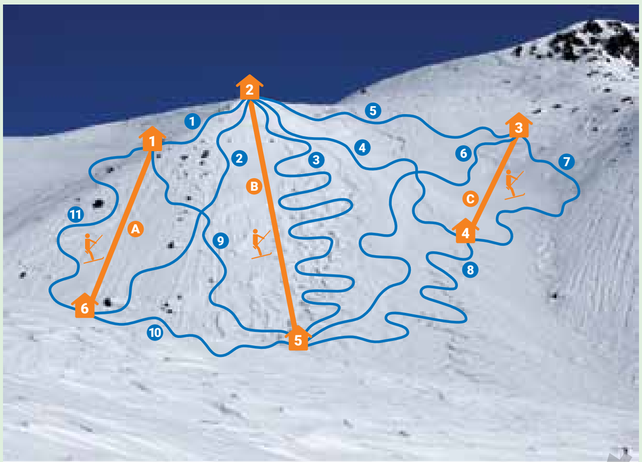
Zeichne unser kleines Skigebiet im Bild als Graph, und zwar als

a) ungerichteter Graph

b) gerichteter Graph

c) gewichteter Graph

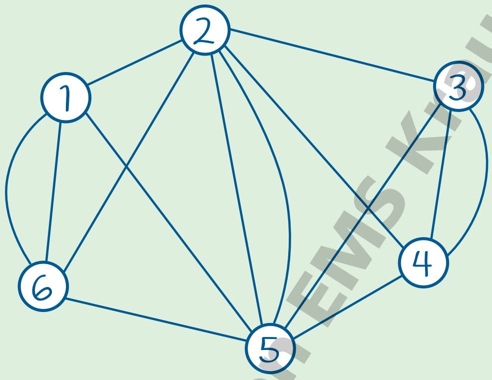
Dabei gehen wir davon aus, dass mit den Schlepp-liften nur bergauf und auf den Pisten nur bergab gefahren wird.



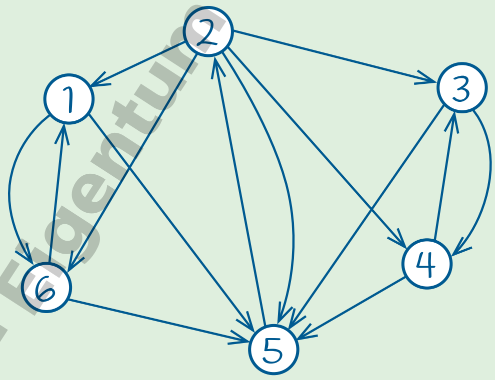
1 Lichtmoosabfahrt	800 m	8 Familienabfahrt	2500 m
2 Kitzsteinabfahrt	3300 m	9 Jägerabfahrt	2800 m
3 Sonneckabfahrt	3800 m	10 Grafenwiese	1400 m
4 Zirbentalabfahrt	3100 m	11 Schafalpeabfahrt	2700 m
5 Fuchsbergabfahrt	2600 m	A Schafalpelift	1300 m
6 Angertalabfahrt	3500 m	B Kitzsteinlift	2700 m
7 Breitspitzabfahrt	1500 m	C Breitspitzlift	800 m

Foto: Natalia Kollegova (Pixabay)

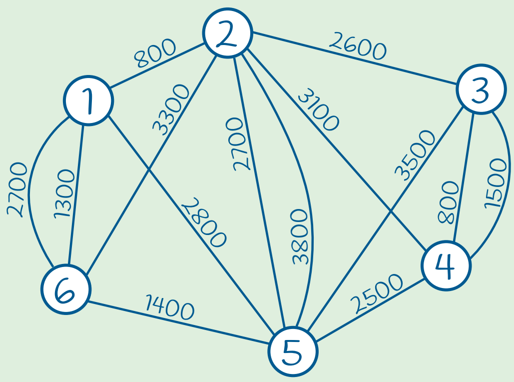
a)



b)



c)



Briefträgerproblem

Eines der bekannten Probleme der Graphentheorie ist das so genannte Briefträgerproblem. Dabei geht es um die Vorstellung von einem Postboten, der in den Straßen einer Stadt – auf beiden Seiten der Straße gleichzeitig – Briefe zustellt. Er soll es auf dem kürzesten Weg erledigen, jede Straße mindestens einmal passieren und wieder zum Ursprung zurückkehren

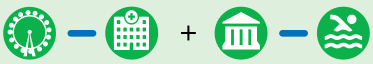
Der chinesische Mathematiker Guan Meigu (*1934), auch bekannt als Mei-Ko Kwan, präsentierte das Problem erstmals 1962. Deshalb erhielt es auch den Namen „Chinese Postman Problem".

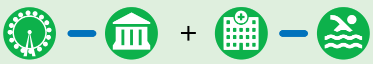
Für die Lösung des Problems wird das Straßennetz als Graph modelliert. Kreuzungen werden darin zu Knoten, die Straßen werden zu Kanten.

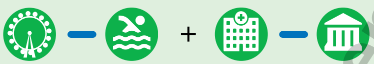
Enthält der Graph einen Eulerkreis, ist der kürzeste Weg die Summe aller nacheinander durchlaufenen Kanten. Also wird im ersten Schritt zur Lösung geprüft, ob der Graph Knoten mit ungeradem Grad enthält.

Der Graph in unserem Beispiel enthält vier Knoten dritten Grades. Um im Graphen einen Eulerkreis zu erzeugen, werden zusätzliche Kanten eingefügt, die jeweils zwei Knoten dritten Grades verbinden. Dabei werden die beiden Verbindungen gewählt, die zusammen die kürzeste Wegstrecke ergeben.

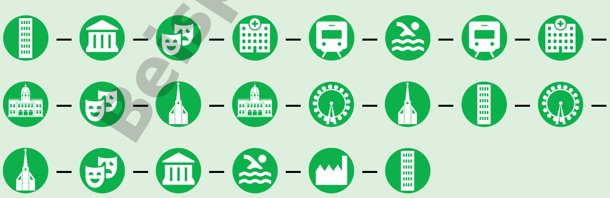
In unserem Beispiel gibt es mehrere Möglichkeiten, die Knoten dritten Grades zu verbinden:

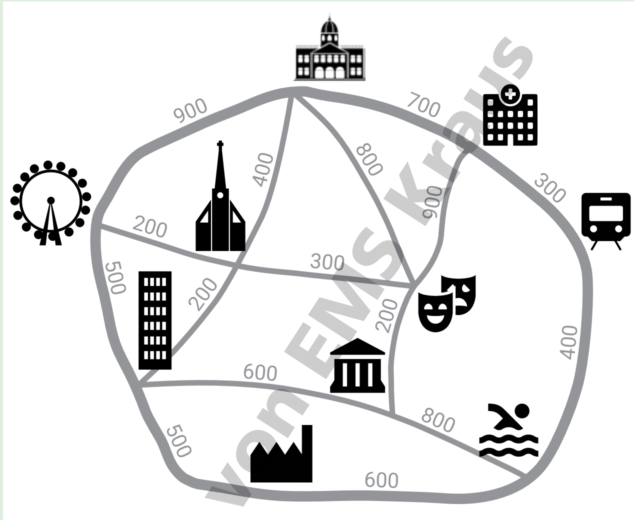
 = 1400 + 800

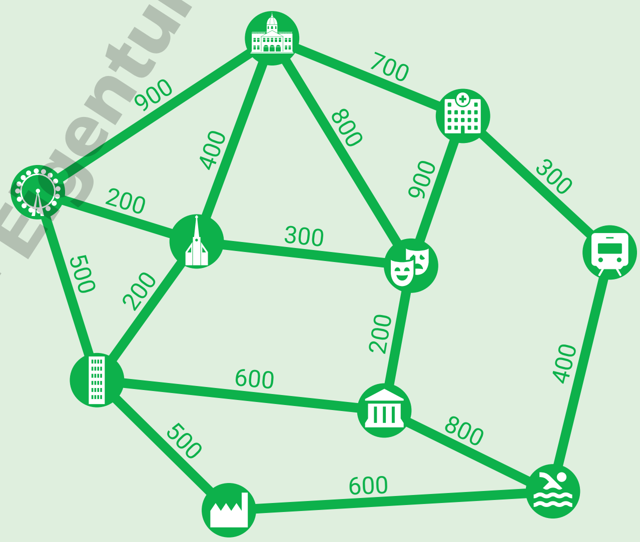
 = 700 + 700

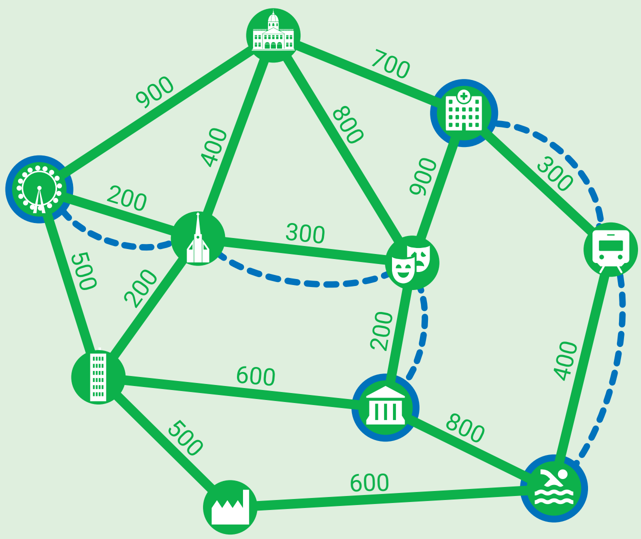
 = 1500 + 1100

Die Verbindungen mit der kürzesten Wegstrecke führen vom Riesenrad zum Rathaus und vom Krankenhaus zum Schwimmbad. Unter Einbeziehung dieser zusätzlichen Kanten ergibt sich ein Eulerkreis, und der Postbote könnte beispielsweise diesen kürzesten Weg nehmen:





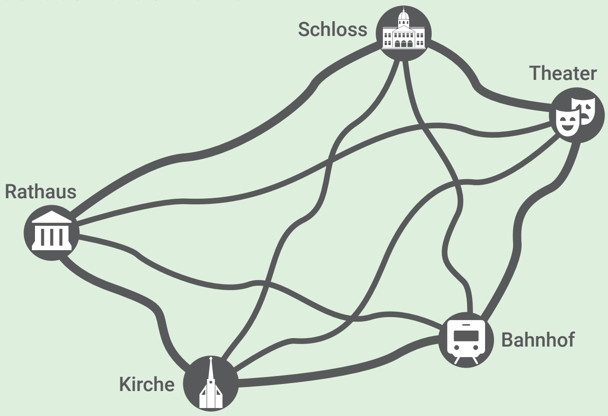




Briefträgerproblem

Aufgabe 1

Ein Briefträger soll in den Straßen der abgebildeten Stadt Briefe austragen. Er soll am Rathaus starten, alle Straßen ablaufen und wieder zum Rathaus zurückkehren.



a) Existiert in der abgebildeten Stadt ein Weg, auf dem der Briefträger alle Straßen genau einmal abläuft und der ihn wieder zum Rathaus zurück führt? Begründe deine Antwort.

Da alle Knoten einen geraden Grad haben, enthält der Graph einen Eulerkreis. Eulerkreise sind geschlossene Kantenzüge, die alle Kanten eines Graphen genau einmal enthalten und bei denen Start- und Endknoten identisch sind. Folglich existiert ein Weg, auf dem der Briefträger alle Straßen genau einmal abläuft und wieder zurück zum Rathaus gelangt.

b) Wie ermittelt man die Länge des kürzesten Weges, den der Briefträger durch die Stadt nehmen kann?

Eulerkreise enthalten alle Kanten eines Graphen genau einmal. Die Länge des kürzesten Weges in einem Eulerkreis ermittelt man folglich durch Addieren der Länge aller Kanten (Straßen).

c) Nenne einen möglichen Weg, den der Briefträger durch die Stadt nehmen kann.

Rathaus – Theater – Kirche – Schloss – Bahnhof – Rathaus – Schloss – Theater – Bahnhof – Kirche – Rathaus

Aufgabe 2

Nenne weitere Anwendungsbeispiele für das Briefträgerproblem?

– Tourenplan Schneepflug

– Routenplan Google-Street-View-Auto

– Tourenplanung Müllabfuhr

Aufgabe 3

Warum ist es sinnvoll, in einem Graphen durch das Einfügen zusätzlicher Kanten einen Eulerkreis zu erzeugen?

Ein Graph ist ein Eulerkreis, wenn in ihm ein Weg möglich ist, der alle Kanten genau einmal durchläuft und zum Ausgangspunkt zurück führt.

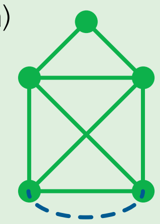
Durch das Erzeugen eines Eulerkreises mit Hilfe zusätzlicher Kanten ist ein Weg möglich, auf dem der Briefträger alle Straßen (Kanten) einschließlich der zusätzlichen Kanten nur einmal ablaufen muss und wieder zurück zum Ausgangspunkt gelangt.

Aufgabe 4

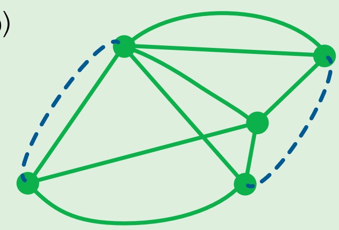
Durch welche zusätzlichen Kanten lassen sich in den folgenden Graphen Eulerkreise erzeugen? Zeichne die zusätzlichen Kanten ein.

Beispiellösungen:

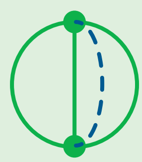
a)



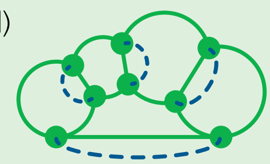
b)



c)



d)

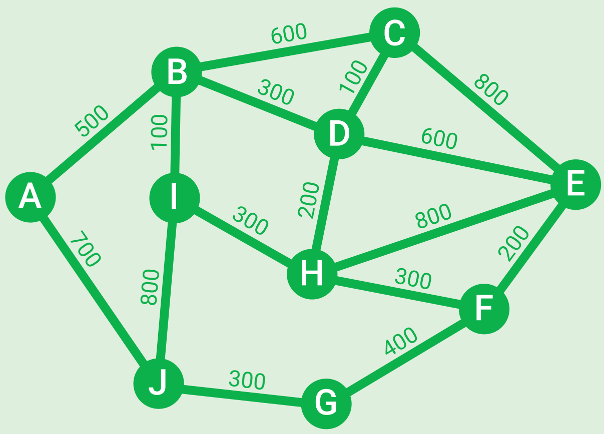


Briefträgerproblem

Aufgabe 5

Der Graph bildet eine Stadt ab, in deren Straßen ein Briefträger die Post austragen soll, bevor er wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Der Graph soll verändert werden, um die kürzeste Route des Briefträgers ermitteln zu können.



a) Welche Knoten müssen dazu mit zusätzlichen Kanten verbunden werden?

Die Knoten C, F, I, J sind 3. Grades. Um einen Eulerkreis zu erhalten, müssen diese vier Knoten mit zusätzlichen Kanten verbunden werden.

b) Welche Möglichkeiten gibt es, diese Knoten mit zusätzlichen Kanten zu verbinden?

I – J + C – D – H – F

I – J + C – E – F

F – G – J + C – B – I

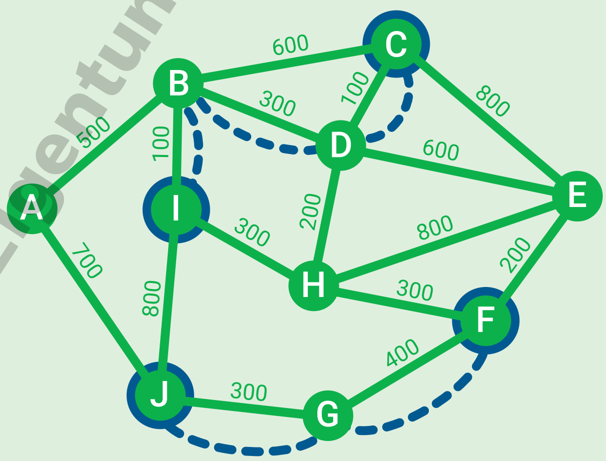
F – G – J + C – D – B – I

F – G – J + C – D – H – I

c) Welche Verbindungen ergeben zusammen die kürzeste Wegstrecke?

I – J + C – D – H – F	=	800 + 600
I – J + C – E – F	=	800 + 1000
F – G – J + C – B – I	=	700 + 700
F – G – J + C – D – B – I	=	700 + 500
F – G – J + C – D – H – I	=	700 + 600

Die kürzeste Wegstrecke ergibt sich durch die Verbindungen F – G – J und C – D – B – I mit einem Gesamt-Kantengewicht von 1200.



Eulerkreis finden mit dem Hierholzer-Algorithmus

Auf der Website der Technischen Universität München gibt es die Möglichkeit, mit Hilfe des Algorithmus von Hierholzer in einem selbst erstellten Graphen einen Eulerkreis zu finden.

Autoren: Mark J. Becker, Wolfgang F. Riedl
https://www-m9.ma.tum.de/graph-algorithms/hierholzer/index_de.html (Stand März 2021)